Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2008

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

1 martie 2008

CLASA A X-A
SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Subiectul 1. Fie a şi b două numere complexe. Să se demonstreze inegalitatea

$$|1+ab|+|a+b| \geq \sqrt{|a^2-1|\cdot|b^2-1|}.$$

Soluţie. Din inegalitatea modulului avem

$$|1+ab|+|a+b| \geq |1+ab+a+b|$$

şi

$$|1+ab|+|a+b| \geq |1+ab-a-b|.$$

.... 3 puncte

de unde, prin înmulţirea acestora, deducem

$$(|1+ab|+|a+b|)^2 \geq |(1+ab)^2-(a+b)^2|$$

.... 3 puncte

ceea ce este echivalent cu $|1+ab|+|a+b| \geq \sqrt{|a^2-1|\cdot|b^2-1|}$.1 punct

Variantă. Avem

$$|1+2ab+a^2b^2|+|a^2+2ab+b^2| \geq |a^2b^2+1-a^2-b^2| = |a^2-1|\cdot|b^2-1|$$

conform inegalităţii modulului............................3 puncte de unde

$$(|1+ab|+|a+b|)^2 \geq |(1+ab)^2-(a+b)^2|$$

.... 3 puncte

ceea ce conduce la concluzie ....1 punct

Subiectul 2. Să se determine numerele întregi x pentru care

$$\log_3(1+2^x) = \log_2(1+x).$$

Soluţie. Evident x e număr natural. Se observă soluţiile $x = 1$ şi $x = 3$ 1 punct

Se verifică că în mulţimea $\{0, 2, 4, 5\}$ nu avem soluţii .... 1 punct

Ecuaţia se scrie $1 + 2^x = (1 + x)^{\log_2 3}$ .... 1 punct

Pentru $x \geq 6$ se demonstrează prin inducţie $1 + 2^x > (1 + x)^2$ .. 3 puncte

Cum $2 > \log_2 3$, rezultă că ecuaţia nu are alte soluţii. .... 1 punct

Subiectul 3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(0)$ este aditivă, adică $g(x + y) = g(x) + g(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că f este constantă.

Soluţie. a) Fie $x, y \in \mathbb{R}$; cu egalitatea din enunţ, avem:

$$\frac{g(x) + g(y)}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2} - f(0) = f\left(\frac{x+y}{3}\right) - f(0) =$$

$$= \frac{f(x + y) - f(0)}{2} - f(0) = \frac{g(x + y)}{2},$$

deci $g(x + y) = g(x) + g(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. .... 3 puncte

b) Pentru $x = y$ deducem $g(2x) = 2g(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ .... 1 punct

Proprietatea funcţiei f implică şi $g(\frac{x+y}{3}) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$ .... 1 punct

ceea ce conduce la $g(\frac{2x+x}{3}) = \frac{g(2x)+g(x)}{2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică $g(2x) = g(x)$ şi în concluzie $g(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ .... 1 punct

În consecinţă $f(x) = f(0)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, adică funcţia este constantă 1 punct

Subiectul 4. Fie $n \geq 3$ un număr întreg şi $z = \cos \frac{2\pi}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{2\pi}{n}$. Considerăm mulţimile $A = \{1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}\}$ şi $B = \{1, 1+z, 1+z+z^2, \ldots, 1+z+\cdots+z^{n-1}\}$.

Să se determine mulţimea $A \cap B$.

Soluţie. Observăm că $1 \in A \cap B$. Fie $w \in A \cap B$, $w \neq 1$. Există atunci k, $1 \leq k \leq n - 1$, astfel încât $w = 1 + z + \cdots + z^k = \frac{1-z^{k+1}}{1-z}$ Cum $w \in A$, rezultă $|w| = 1$, deci $|1 - z^{k+1}| = |1 - z|$ .... 3 puncte

Ultima egalitatea este echivalentă cu $\sin \frac{(k+1)\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{n}$, de unde $\frac{(k+1)\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{n}$, adică $k = n - 2$ şi deci $w = \frac{1-\frac{1}{z}}{1-z} = -\frac{1}{z}$ .... 2 puncte

Deoarece $w \in A$, trebuie ca $w^n = 1$, deci n trebuie să fie par ... 2 puncte

În concluzie, pentru n impar avem $A \cap B = \{1\}$ iar pentru n par avem $A \cap B = \{1, -\frac{1}{z}\}$.